

江苏师范大学

《数学方法论》

教 案

2022~2023 学年第一学期

课 程 名 称	数学方法论
院 (系 、 部)	教育科学学院/教师教育学院
教 研 室	小学教育
授 课 班 级	20 教 12、20 教 13 20 教 22、20 教 23
授 课 教 师	刘林
职 称 职 务	研究员
教 材 名 称	《数学方法论》

二〇二〇 年 八 月

授课时间	第八—十五周	授课顺序	第 8-15 次课
课程类型	理论课、应用课	学时分配	24 学时
方法手段	讲授法、讨论法、练习法	使用教具	PPT
章节名称	第四章 常见的数学思想与数学解题		
教学目的 要求	1. 从“符号的产生源出于人类的“给予意义”的行为”出发，使学生掌握什么是数学符号，以及数学与数学符号的相互影响。 2. 了解方程思想体是已知与未知的对立统一，是解决各类计算问题的基本思想，是运算能力的基础。掌握方程思想的步骤与应用。 3. 了解函数思想就是用运动变化的观点，分析和研究具体问题中的数量关系，建立函数关系，运用函数的知识，使问题得以解决。掌握函数思想应用的几种常见题型，以及函数思想在数学教学中的几个应用。 4. 了解公理化方法就是从基本概念出发去定义其他的一切概念，从一组不证自明的命题出发，经过逻辑推理证明其他的一切命题，进而把一门学科的知识建构成为演绎系统的一种方法。 5. 了解整体化思想就是暂时不注重于系统的某些元素的分析，暂时忽略或模糊系统的某些细节，而是重视元素之间的联系、系统的整体结构，从整体上考虑命题的题设、题断及其相互关系，从整体上把握解决问题的方向，并作出决策。 6. 了解分类的原因，掌握分类的标准和方法。 7. 了解集合思想的主要贡献是沟通了数和形的内在联系，并把握集合论的基本原则。 8. 了解等价变换是指把原问题变更为新问题，使两者的答案完全相同，并了解等价条件变换的三种形式。 9. 了解什么是逐步逼近思想及其应用。		
教学重点 难点	重点：理解和掌握符号化思想。 难点：逐步逼近思想的应用。		
教学过程	教学内容及步骤		备 注
	讲授新课内容、步骤： 引言 数学思想方法的两个源头 古代数学大体可分为两种不同的类型：一种是崇尚逻辑推理，以《几何原本》为代表；一种是长于计算和实际应用，以《九章算术》为典范。这两本著作对世界数学的发展都有着重大影响，在知道这两本著作形成的大致情况和基本内容的基础上，可以运用对照和比较的方法来加深理解它们思想方法的特点与意义，从而体会它们是数学思想方法的两个源头。 一、古希腊的《几何原本》 1. 《几何原本》的产生 在数学中建立公理体系，最早的是几何学，而这方面的代表著作是古		“数学史”引入

	希腊学者欧几里得（Euclid）的《几何原本》（约前 300）。这是一本选择一些课题作为“要素”（elements，这里是指在一门学科中经常使用的一些重要的、关键性的定理，在证明其他几乎所有定理时，都需要用到它们）的论证性的学科教材。 《几何原本》中的素材并非欧几里得所独创，大部分材料来自同他一起学习的柏拉图学派。根据 5 世纪的数学评注家普罗克洛斯（Proclus）说，欧几里得把欧多克斯的许多定理收入了《几何原本》，另外他还熟悉泰特托斯(Theatetus)的著作并且完善了其定理，因此欧几里得的工作在很大程度上是集前人工作之大成。 欧几里得在对“要素”特定的选择、把定理排列成一个逻辑上连贯的序列时所表现的惊人技巧，以及对前人只是马马虎虎证明的结果给予无懈可击的论证等方面的成就是无与伦比的。 欧几里得《几何原本》的出现，是数学史上一个伟大的里程碑，它不仅是几何学建立的标志，同时也是公理体系在具体学科中应用成功的标志。 2. 《几何原本》的内容简介 欧几里得的《几何原本》是一本极具生命力的经典著作。全书共十三卷，总共有 475 个命题，包括 5 个公设（Postulate）和 5 个公理（Axiom）。除几何外，还包括初等数论、比例理论等内容。 3. 《几何原本》思想方法的特点 ① 封闭的演绎体系 ② 抽象化的内容 ③ 公理化的方法 4. 《几何原本》思想方法的深远意义 欧几里得的《几何原本》几乎概括了古希腊当时所有理论的数论及几何学，成为近代西方数学的主要源泉之一。 二、中国的《九章算术》 1. 《九章算术》的产生 秦始建立统一的封建帝国之后，统一了文字和度量衡制度；到了西汉，社会经济和文化得到迅速发展。因此有必要，也有可能对先秦时期已经积累起来的、丰富的数学知识，进行较为系统的整理，形成专门的数学理论。 据史书记载，秦时掌管过国家图书的张仓，西汉时的大司农耿寿昌以及许商、杜忠等人都编写过或校订过算书。他们大多是执管天文历法、农业、水利等方面的官员，所编的算书也大多为了培养行政官吏或教习官家子弟。因此，这些算书都是采取问题集的形式（感觉和现在的案例教学很像），对提出的问题，给出一种具体算法和答案。 虽然秦和西汉时的算书大多失传，但从《算数书》中仍可以看到一个大概情形。《算数书》是 1983 年在湖北江陵张家山出土的西汉早年（约前 180）的竹简算书，无具名。它已初具问题集形式，并按算法将问题分类。分类的小标题为“分乘”“增减分”等 60 多个，其中大部分算法术语，都出现在以后的《九章算术》之中，它很可能是《九章算术》的取材来源之一。 《九章算术》就是在上述“算书”的基础上，系统总结了先秦至东汉初年我国的数学成就，经历代名家补充、修改、增订而逐步形成的。在 1 世	
--	--	--

	纪时，已有了现传本的内容。现传世的《九章算术》是三国时魏晋数学家刘徽于 263 年注释的版本。 2. 《九章算术》的内容简介 《九章算术》是中国古代的一本著名数学著作。“算”指算筹，“术”指解题的方法，因而“算术”是指用筹演算的原理和方法，包括现在所说的算术、代数和几何的各种算法。又因其分九章，故由此得名。《九章算术》每一章都包括若干道问题，数目不等，大致从简到繁排列。全书共有 246 道题，每道问题后给出答案，一些问题后还给出“术”。 算筹（春秋战国已经很普遍）$\rightleftharpoons$算盘（认为源于唐）$\rightleftharpoons$计算器（20C） 3. 《九章算术》思想方法的特点 ① 开放的归纳体系 ② 算法化的内容 ③ 模型化的方法 4. 《九章算术》思想方法的重大影响 《九章算术》曾长期被人们用作学习和研究数学的重要著作。隋唐时期开始建立国立学校，其中有算学科。在民间此书也广泛流传，所以，《九章算术》及其思想方法对后世的影响非常巨大而深远。古代研究数学的人大多是从《九章算术》开始，有些人正是通过对它的研究取得重要成就，而成为历史上杰出的数学家，其中最著名的有刘徽、祖冲之父子、贾宪等。 《九章算术》以后的许多数学著作都按其格式编写，注重实用、不注意逻辑结构，来用“问题—答案—算法”的体例。甚至一些著作的书名都沿用“九章”两字，如《数书九章》《详解九章算法》等。《九章算术》中的数学成就是多方面的。它是世界上最早系统叙述分数运算的著作；关于负数的论述也是世界上最早的。 印度发现负数的记载最早见于 7 世纪。表示负数的梵文，与汉字的“负”字相同，这表明我国的负数概念对印度数学有一定的影响。当《九章算术》中的比例算法传到欧洲时，引起了欧洲人的极大兴趣，他们称之为“黄金算法”，认为它是各种算法中最宝贵的算法。我国古代称这种算法为“今有术”，它早于印度数学书籍记载的“三率法”。 《九章算术》用“盈不足术”来解决算术中的难题。这种算法约在 9 世纪传入阿拉伯，13 世纪传入欧洲后，得到广泛的运用和发展。阿拉伯人把“盈不足术”叫做“契丹算法”，从这个名称演变出“震旦”（中国）一词，可见它确系由我国传播出去的。 作为一部世界科学名著，《九章算术》在隋唐时期就已传入朝鲜、日本。对日本、朝鲜等东方诸国的数学发展有过很大作用。人们现在越来越认识到《九章算术》不仅对我国古代数学影响极大，而且对世界数学的发展也起着重要的作用，因而引起各国学者、专家的重视，前苏联、日本、德国、英国等国都有《九章算术》译本。 《九章算术》的思想方法不仅对古代数学的发展产生了重大影响，而且也是现代数学思想发展的一大源头。在现代数学的发展过程中，一再重现这种思想。如在 17 世纪微积分产生初期，就不是靠理论的严格，而是靠实际应用的成功来保证其“可靠性”的。现代应用数学是按应用方向或主要应用的数学模型来分类的。现代数学是一个开放的系统，成为各门科学的方法或工具。	
--	--	--

	随着电子计算机的蓬勃兴起，更进一步肯定了以发展算法和计算技术为中心的中国传统数学的长处。中国科学院院士、著名数学家吴义俊教授在几何定理的机器证明领域所取得的成就，正是以《九章算术》为代表的中国传统数学特色在现代条件下的发扬光大。 第一节 符号化思想 数学符号是数学的语言，数学的世界是一个符号化的世界，数学作为人们进行表示、计算、推理和解决问题的工具，符号起到了非常重要的作用；因为数学有了符号，才使得数学具有简明、抽象、清晰、准确等特点，同时也促进了数学的普及和发展；国际通用的数学符号的使用，使数学成为国际化的语言。 “符号是交流与传播数学思想的媒介”。一般说来，符号是人们约定用来指称一定对象的标志物，是用以表达和交换思想的工具。 符号的产生源出于人类的“给予意义”的行为，即给予某种事物以某种意义，从某种事物中领会出某种意义，最简单的例子是日常生活中的命名行为，给某事物赋予特别的名称，使这一名称具有特定的含义。 符号是传播意识的一种意愿标志，其核心就是用“某事物代表某事物”任何符号总依赖于两个“某事物”之间相互依存关系。人们就把这两项依次称作“符号形式（能指）”和“符号的内容（所指）”瑞士著名语言学家、现代语言学奠基人索绪尔称前者为“声音形象”，后者是“声音形象所表达的概念”，还有些学者把这两项称为“表达平面”和“内容平面”任何一个符号都包括两个方面，即符号形式与符号内容，符号的功能是用符号的形式代表符号的内容，基础是“符号形式”和“符号内容”之间的相互依存关系。 对于每一种符号来说，根据约定俗成、表达的含义等因素，一般都相对稳定地表示一定的内容，而对于某种事物，人们常常习惯于用某种特定的符号形式来表示。例如用“$\triangle$，$\bigcirc$，$\approx$，$\therefore$，$\therefore$”来表示三角形、圆、约等于、因为、所以。对于一个符号来说，缺少这两项里的任何一项，“符号”以至“符号功能”都不能成立。如果只有一定的内容，没有给予一定的表示形式，也谈不上是“符号”或“符号内容”。在现代，符号的概念已不再限于人类言语活动的一些标志，它已扩展到人类社会的很多方面，正如著名语言学家皮埃尔·吉罗所说：“我们生活在符号之间。” 数学的语言系统是一个符号化的系统，现代数学如果没有精确化的符号是难以想象的。用符号化表述数学的方法和内容是数学学科的一大特色，正因为数学语言的符号化，不同于一般的语言系统，如汉语、英语、法语、德语、俄语……，数学语言才有可能成为一个国际化的语言，数学符号，按其性质可分为元素符号、关系符号、运算符号、约定和辅助符号。 数学的发展推动了数学符号的发展，同时数学符号的发展又促进了数学的发展。“数学的一切进步都是对引入符号的反应”。 在数学发展史上，有人把17世纪称为“天才的时期”，也有人把18世纪称为“发明的时期”。这两个世纪的数学为什么会有较大的发展呢？原因之一就是这两个世纪大量地创造了数学符号。 历史表明，数学符号与数学方法有密切的关系。数学上对一般方法论的关心出现于16~17世纪，它正是由于代数符号体系的建立而引起的，数	组织学生讨论例题，使学生在解题中把握数学思想和解题方法。
--	--	-------------------------------------

	学中的符号化思想方法受到近年数学方法论研究的格外重视，有人甚至认为，没有数学符号，就没有现今的数学。 一、数学符号的特征 1. 物质性 作为事物表示形式的符号，都具有一定的意义，在形式上表现为一定的物质运动或存在形式；从物质世界的对象，经过人的加工或改变的抽象，是以一定的物质形式为背景的。 2. 抽象性 数学学科本身的基本特点就是抽象性，数学是一种抽象化了的思想材料。例如，世界上根本就没有方程，自然也就不具备物质的意义，方程是人们从现实世界量的关系中抽象出来的思想材料。而化学中的元素符号 C, H, O 等，则具有客观存在的物质意义，它还是客观存在于人脑之外的现实中，数学中的符号比一般科学中的符号抽象。 3. 精确性 数学符号不同于日常生活术语中意义含糊不清的符号。数学中的结论不同于实验科学的结论，实验科学主要是通过重复实验来“验证”。而数学主要是依靠严格的推理来演绎“证明”。如果符号不精确，就很难保证推理能够正确进行。 4. 规范性 符号与它指代的对象必须具有相对的稳定性，不能任意改变符号的意义，或乱用符号来表示。 常用的数学符号在国际上一般都有规范的统一的写法，表示同样的含义，以保证数学语言成为一个国际通用的语言，便于国际间的交流。 5. 开放性 数学符号系统是一个开放的系统，随着数学自身的不断发展而不断完善。伟大的哲学家、数学家莱布尼茨被称为“符号学之父”，这是因为他在前人的基础上完善了无穷小运算的符号体系。一般说来，前人所创设的数学符号往往在后继的实践中能得以完善，并促进数学的发展。 二、符号对数学发展的影响 数学符号演化的自身规律表明，数学的符号化必须适应数学体系发展的需要，“一种合适的符号要比一种不良的符号更能反映真理”。 符号的优劣直接影响数学发展速度的快慢。在数学的发展过程中，一方面对符号的改革不断发展，另一方面符号的改进又加速了数学学科的发展。 欧洲在阿拉伯数码输入之前，使用罗马数码。这种计数法中用 I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, L, C, D, M 分别表示 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 50, 100, 500, 1000。它不是进位制的，一个简单的数要写成长长的一串，这种笨拙的计数法在 12 世纪以前盛行于欧洲，有的国家直到 16 世纪还在使用。那时，“做加减法已相当困难，会乘法就可以称为专家了”。 数学史料中记载了当时算术教科书中的一个乘法实例 235×4 的计算过程（详见 P76-77）。 三、数学符号导致新的数学分支的产生 数学符号的产生不仅影响了数学发展的进程，同时也导致了新的数学	
--	---	--

	分支的产生，符号化使得数学本身以及以数学为主要工具的科学的面貌发生革命性的变化。 近代，代数学的发展起源于对方程的研究。代数和算术的主要区别在于：在计算过程中引入未知量，根据问题的条件列出方程，然后求出未知量的值。 代数学的发展首要的一步就是用符号代表数字，用符号代表文字叙述，韦达第一个比较有意识地、系统地使用数学符号表示数字和算式，并对字母符号进行运算。正是因为这些符号的运用，才使得“代数”能够逐渐成为一门正式的学科而独立出来。 符号化思想是一般化的思想方法，也是数学中最基本、最原始、最重要、最根本的思想方法之一，具有普遍的意义。因此数学课程标准也重视培养学生的符号意识，并提出了几点要求，那么，如何理解这一重要思想呢？下面结合案例做简要解析。 1.如何理解符号化思想？ 第一，能从具体情境中抽象出数量关系和变化规律，并用符号表示。这是一个从具体到抽象、从特殊到一般的探索和归纳的过程，如通过几组具体的两个数相加，交换加数的位置和不变，归纳出加法交换律，并用符号表示：$a+b=b+a$。再如在长方形上拼摆单位面积的小正方形，探索并归纳出长方形的面积公式，并用符号表示：$S=ab$。这是一个符号化的过程，同时也是一个模型化的过程。 第二，理解符号所代表的数量关系和变化规律，这是一个从一般到特殊、从理论到实践的过程，包括用关系式、表格和图象等表示情境中数量间的关系，如假设一个正方形的边长是 a，那么 $4a$ 就表示该正方形的周长，a^2 表示该正方形的面积，这同样是一个符号化的过程，同时也是一个解释和应用模型的过程。（例 1 见 P77-78） 第三，会进行符号间的转换。数量间的关系一旦确定，便可以用数学符号表示出来但数学符号不是唯一的，可以丰富多彩。例如，一辆汽车的行驶速度为 80km/h，那么该辆汽车行驶的路程和时间成正比，它们之间的数量关系既可以用表格的形式表示，也可以用公式 $S=80t$ 表示，还可以用图象表示，即这些符号是可以相互转换的。 第四，能选择适当的程序和方法解决用符号所表示的问题。这是指完成符号化后的下一步工作，就是进行数学的运算和推理，能够进行正确的运算和推理是非常重要的数学基本功，也是非常重要的数学能力。 四、补充 符号意识主要是指能够感悟符号的数学功能。知道符号表达的现实意义；能够初步运用符号表示数量、关系和一般规律；知道用符号表达的运算规律和推理结论具有一般性；初步体会符号的使用是数学表达和数学思考的重要形式。符号意识是形成抽象能力和推理能力的经验基础。 ——《义务教育数学课程标准（2022 年版）》 第二节 方程与函数思想 方程的发展在很大程度上依赖于符号的创造、使用和推广。现在数学中使用的符号几乎都是 15 世纪以后产生的，虽然在此之前人们也使用一些符号，但是数量极少，而且不具有统一性和延续性。	
--	---	--

	古代数学主要是由各地、各民族自己的文字语言直接描述客观现象中的数量关系，这样也就极大地阻碍了方程的发展。 纵观方程思想的发展，我们可以发现，在解方程理论的初期形成阶段，人们关心的是解决实际问题，其次才是方法上的完善，随着数学模型的建立，人们对模型本身和方法的研究就大大地超过了对实际问题的考虑。因此，我们有理由说，方程的思想本质上体现模式构造的思想。 方程思想的核心是运用数学的符号化语言，将问题中已知量和未知量（或参变量）之间的数量关系，抽象为方程（或方程组）、不等式等数学模型，然后通过对方程（或方程组）、不等式的变换求出未知量的值，使问题获解。 方程思想体现了已知与未知的对立统一，方程思想是解决各类计算问题的基本思想，是运算能力的基础。 一、掌握方程思想可分为以下三步： 1.学会代数设想。假定问题已解，即未知量客观存在且假设它已求出，然后用字母代表未知量，且与已知量平等对待。 2.学会代数翻译。透彻分析实际问题中已知量和未知量之间的关系，将用自然语言表达的实际问题翻译成用符号化语言表达的方程或不等式。 3.掌握解方程的思想。笛卡尔的方程思想是：实际问题 → 数学问题 → 代数问题 → 方程问题。宇宙世界，充斥着等式和不等式。 二、方程思想在数学解题中的几个应用 1.将函数问题转化为方程问题 例1：已知抛物线$y = ax^2 + 4x + a + 3$的最高点的纵坐标为0，求a的值。 思考与分析：一般思路是直接从函数解析式入手，求出其最高点的坐标是含a的表达式，再令纵坐标等于0，求出a的值，这一过程计算比较烦琐。 事实上，$y = ax^2 + 4x + a + 3$的最高点的纵坐标为0，说明顶点在x轴上，即抛物线与x轴只有一个交点，所以方程 $ax^2 + 4x + a + 3 = 0$ 有两个相同的实数根，即$\Delta = 0$，可求得$a = 1$或$a = -4$。 2.构造方程探索问题的解 例2：已知$9\cos B + 3\sin A + \tan C = 0 (B \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z)$，且有$\sin^2 A - 4\cos B \tan C = 0$，求证 $\tan C = 9\cos B$。 思考与分析：如果直接 从已知的两个等式出发 来推导证明 $\tan C = 9\cos B$，不仅烦琐而且还有一 定的困难.但是，利用恒等式或等式和方程间 的内在联系构造方程来 解答，可以很巧妙的化繁为简。 证明见下一页。	
--	---	--

例2: 已知 $9\cos B + 3\sin A + \tan C = 0 (B \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z)$, 且有

$\sin^2 A - 4\cos B \tan C = 0$, 求证 $\tan C = 9\cos B$.

证明: 由已知等式中的常数 $9 = 3^2$, 联想到构造一元二次方程 $\cos B \cdot x^2 + \sin A \cdot x + \tan C = 0$.

又因为 $\Delta = \sin^2 A - 4\cos B \cdot \tan C = 0$, 所以方程 $\diamond$ 有两个相等的根 $x_1 = x_2 = 3$, 进而由韦达定理可得 $\tan C = 9\cos B$.

3. 运用方程思想求参数的取值范围

例7: 已知椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 试确定 m 的取值范围, 使得对于 $y = 4x + m$,

椭圆 C 上有不同的两点关于该直线对称.

思考与分析: 由题意, 需求 m 满足的不等式. 设椭圆 C 上存在两点 A 和 B 关于直线 $y = 4x + m$ 对称, AB 的中点 $M(x_0, y_0)$ 与椭圆中点 O 的连线的斜率为 k_{OM} , 则有

$$k_{OM} \cdot k_{AB} = -\frac{3}{4}, \quad k_{AB} = -\frac{1}{4}, \quad k_{OM} = 3.$$

可得 $M(-m, -3m)$ 由点 M 在 C 的内部得 $\frac{(-m)^2}{4} + \frac{(-3m)^2}{3} < 1$,

解不等式即可得 m 的取值范围为 $-\frac{2\sqrt{13}}{13} < m < \frac{2\sqrt{13}}{13}$.

17 世纪以前, 人们对数学的需要还停留在常量数学的范围内, 1692 年, 莱布尼茨首次使用了“function”一词。

函数是中学数学中最基本、最重要的内容之一, 是贯穿于中学数学的一条主线, 是学习高等数学的基础, 学习函数最重要的是树立函数思想。

函数思想就是用运动变化的观点, 分析和研究具体问题中的数量关系, 建立函数关系, 运用函数的知识, 使问题得以解决, 这种思想方法在于揭示问题的数量关系的本质特征, 重在对问题的变量的动态研究, 从变量的运动变化、联系和发展的角度拓宽解题思路, 在解题中, 充分合理地运用函数的思想方法, 有时会给解题带来很大的方便。

三、函数思想的特征

1. 函数思想反映的量与量之间的关系是运动变化中的关系

算术研究的是具体的确定的常数以及它们之间的运算关系, 代数研究的是一般抽象的数符号所代表的数, 并研究确定的常数和不确定常数之间的依赖关系。

函数研究的是变量之间的依赖关系, 这与不定方程中不确定常数之间的依赖关系有质的不同。

2. 对应是函数思想的本质特征

对于函数 $y = f(x)$, 我们更重要的是了解 y 按照怎样的条件所规定的关系依赖于 x , 即对应法则 f 是构成函数的基本要素。

3. 自变量的变化处于主导地位

函数的值域是由定义域通过对应法则所决定的, 自变量的变化范围——定义域是函数的另一个基本要素。

五、函数思想在数学解题中的几个应用

一般地, 函数思想是构造函数从而利用函数的性质解题, 经常利用的性质是: 函数的单调性、奇偶性、周期性、最大值和最小值、图象变换等, 要求我们熟练掌握的是一次函数、二次函数、幂函数、指数函数、对数函

	数、三角函数的具体特性。 在解题中，善于挖掘题目中的隐含条件，构造出函数解析式和妙用函数的性质，是应用函数思想的关键。 对所给的问题观察、分析、判断比较深入、充分、全面时，才能产生由此及彼的联系，构造出函数原型。 另外，方程问题、不等式问题和某些代数问题也可以转化为与其相关的函数问题，即用函数思想解答非函数问题。 函数知识涉及的知识点多、面广，对概念性、应用性、理解性都有一定的要求。 我们应用函数思想的几种常见题型是： ① 遇到变量，构造函数关系解题； ② 有关的不等式、方程、最小值和最大值之类的问题，利用函数观点加以分析； ③ 含有多个变量的数学问题中，选定合适的主变量，从而揭示其中的函数关系； ④ 实际应用问题，翻译成数学语言，建立数学模型和函数关系式，应用函数性质或不等式等知识解答； ⑤ 等差、等比数列中，通项公式、前 n 项和的公式，都可以看成 n 的函数，数列问题也可以用函数方法解决。 例14: 证明恒等式 $\frac{a^2(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x^2$. 证明：等式左边为 x 的多项式，其次数不超过2. 令 $f(x) = \frac{a^2(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)},$ 则有 $f(a) = a^2, f(b) = b^2, f(c) = c^2$. 易见 $f(x)$ 与 x^2 在三个数值上取值相同，因此 $f(x) \equiv x^2$. 例15: 证明 $\frac{\sqrt{x^2+4}(\sin x + \cos x)}{x^2+5} < 1$. 思考与分析：由 $\sin x + \cos x$ 引发“三角函数”的思考，将问题图式表象进行分解与组合. 若 $\sin x + \cos x < \frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}$, 观察左边，引发图式表象“三角函数”$\Rightarrow$“最大值”$\Rightarrow$“合并”. 于是有 $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$, 若右边 $> \sqrt{2}$, 则问题解决了. 而右边 $= \sqrt{x^2+4} + \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} \geq 2$, 故得证.	
--	--	--

例16: 设 x, y, z 有关系式 $x-1=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{3}$, 试求在上述条件下

$f=x^2+y^2+z^2$ 的最小值.

解: 设中间变量 k , 令 $x-1=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{3}=k$, 则有

$$\begin{cases} x=k+1 \\ y=2k-1, \\ z=3k+2 \end{cases}$$

将其带入 f , 得 $f=(k+1)^2+(2k-1)^2+(3k+2)^2=14k^2+10k+6=14\left(k+\frac{5}{14}\right)^2+\frac{59}{14}$,

得 $k=-\frac{5}{14}$, 即 $x=\frac{9}{14}, y=-\frac{24}{14}, z=\frac{13}{14}$, 有 $f_{\min}=\frac{59}{14}$.

例17: 直线 $m: y=kx+1$ 和双曲线 $x^2-y^2=1$ 在左支交于 A, B 两点, 直线 l 过点 $P(2,0)$ 和线段 AB 的中点 M , 求 l 在 y 轴上的截距 b 的取值范围.

解: 由 $\begin{cases} y=kx+1 \\ x^2-y^2=1 \end{cases} (x \leq -1)$ 消去 y 得 $(k^2-1)x^2+2kx+2=0$, 由题意得

$$\begin{cases} \Delta=4k^2+8(1-k^2)>0 \\ x_1+x_2=\frac{2k}{1-k^2}<0 \\ x_1x_2=\frac{-2}{1-k^2}>0 \end{cases}, \text{ 解得 } 1 < k < \sqrt{2}. (\text{下一页继续})$$

$$\text{设 } M(x_0, y_0), \text{ 则 } \begin{cases} x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{k}{1-k^2} \\ y_0=kx_0+1=\frac{1}{1-k^2} \end{cases}.$$

由 $P(2,0), M\left(\frac{k}{1-k^2}, \frac{1}{1-k^2}\right), Q(0,b)$ 三点共线可求得 $b=\frac{2}{-2k^2+k+2}$.

设 $f(k)=-2k^2+k+2$, 则 $f(k)$ 在 $(1, \sqrt{2})$ 上为减函数.

所以 $f(\sqrt{2}) < f(k) < f(1)$, 且 $f(k) \neq 0$.

于是有 $-(2-\sqrt{2}) < f(k) < 1$.

故 $b < -(2-\sqrt{2})$ 或 $b > 0$.

1. 化抽象为具体、一般为特殊, 展开教学

波利亚在谈到怎样拟定解题计划时写到, 你若不能解这道题, 那么试着去解决一个更容易着手的简单问题、一个更特殊的问题、一个类似的问题. 对函数与方程思想的教学我们应该从最简单的情形、更容易解决的情况入手, 然后再推广到一般的情形, 往往能起到事半功倍的作用.

2. 倒置题目的条件与结论, 利用函数的性质解题

在我们所遇到的大量数学问题中, 有不少是结论唯一、思路单一, 易形成思维定势, 而考试命题既要涉及学段的许多知识点, 又要避开既有的大量题海, 使其真正测试出学生的数学能力, 势必要将知识点重新组合, 出新、出意, 而倒置题目的条件与结论, 就能锻炼学生的分析问题和综合

	运用知识的能力，这也是（高考）命题的一个新的方向。 例18: 已知函数$y = \log_2(x^2 - 4x + 3)$, 求函数的值域. 通过倒置命题的条件和结论改为 例18': 已知函数$y = \log_2(x^2 - ax + 3)$值域为R, 求a的取值范围. 3. 建立基本量与未知量之间的关系, 用方程的思想来解题 著名数学家陈省身在谈到好的数学就是以方程为例说它是好的数学。 事实上, “方程是数学通向实际的桥梁”, 数学与实际中的许多问题, 最后都归纳为方程的解。 例21: 设$\{a_n\}$是由正数组成的等比数列, S_n是其前n项的和.求证: $\frac{1}{2}(\lg S_n + \lg S_{n+2}) < \lg S_{n+1}.$ 用方程思想来解: 原方程 $\Leftrightarrow S_{n+1}^2 > S_n S_{n+2} (S_n > 0, n \in N)$ $\Leftrightarrow S_n x^2 + 2S_{n+1}x + S_{n+2} = 0$ 有两个不等的实根. 当$q = 1$时, 方程 $\Leftrightarrow nx^2 + 2(n+1)x + (n+2) = 0$, 即$(x+1)(nx+n+2) = 0$, 显然有两个不等的实根. 当$q \neq 1$时, 方程 $\Leftrightarrow (1-q^n)x^2 + 2(1-q^{n+1})x + q^{n+2} = 0$, 即$(x+1)^2 - q^n(x+q)^2 = 0$, 显然有两个不等的实根. 4. 构造辅助问题, 利用函数的思想解题 例23: 已知对一切$m \in R, \theta \in [0, 2\pi), f(\theta) = \frac{1}{2} \cos 2\theta - 2m \cos \theta + 4m - \frac{3}{2}$ 恒大于0, 求m的取值范围. 证明: 原问题 $\Leftrightarrow$ 对一切$m \in R$, 均有 $\cos^2 \theta - 2m \cos \theta + 4m - 2 > 0$, 即 $2m > \frac{\cos^2 \theta - 2}{\cos \theta - 2}.$ 构造辅助问题1: 只要求$u = \frac{\cos^2 \theta - 2}{\cos \theta - 2}$ 的最大值. $u = \cos \theta + 2 + \frac{2}{\cos \theta - 2} = 4 - \left(2 - \cos \theta + \frac{2}{2 - \cos \theta} \right) \leq 4 - 2\sqrt{2},$ 等号当且仅当$(2 - \cos \theta)^2 = 2$, 即$\cos \theta = 2 - \sqrt{2}$时达到, 故$m$的取值范围为$m > 2 - \sqrt{2}$. 以上从四方面谈了如何在中学数学教学中, 加强函数方程思想的教学, 使学生领悟函数思想的运用规律, 形成观念, 在高考中能灵活运用, 当然应用函数思想的同时, 还应注意换元、消元、配方、数形结合、分类讨论、化归等思想方法的运用。 5. 用函数思想解有关求值问题	
--	--	--

	例24: 如实数a, b满足$a^3 - 3a^2 + 5a = 1$, $b^3 - 3b^2 + 5b = 5$, 求$a + b$的值. 思考与分析: 一般思路是分别对两个方程进行求解得到a, b的值, 但三次方程求解并不容易. 观察发现两个等式恰好是$f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x$当$x = a$和$x = b$时的值, 即$f(a) = 1, f(b) = 5$. 可以尝试从函数角度解题. 证明: 考察函数$f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x = (x-1)^3 + 2(x-1) + 3$. 令$t = x - 1$, 则$g(t) = t^3 + 2t$是奇函数, 且在定义域内是单调递增, 由$f(a) = g(a-1) + 3 = 1$, $f(b) = g(b-1) + 3 = 5$, 得$g(a-1) = -2$, $g(b-1) = 2$, 所以$g(a-1) = -g(b-1)$. 由$g(t)$的单调递增和奇函数性质, 故必有$a-1 = -(b-1)$, 所以$a + b = 2$. 例25: 函数$f(x) = a^x (a > 0, a \neq 1)$在$[1, 2]$中的最大值比最小值大$\frac{a}{2}$, 求$a$的值. 思考与分析: 函数在$[1, 2]$上的单调性取决于$a$的值. 当$a > 1$时, $f(x) = a^x$单调递增, 所以$f(x)$在$[1, 2]$范围内的最大值为a^2, 最小值为a, 由题意得$a^2 - a = \frac{a}{2}$, 所以$a = \frac{3}{2}$. 当$0 < a < 1$时, $f(x) = a^x$单调递减, 所以$f(x)$在$[1, 2]$范围内的最大值为a, 最小值为a^2, 由题意得$a - a^2 = \frac{a}{2}$, 所以$a = \frac{1}{2}$. 因此$a = \frac{3}{2}$或$a = \frac{1}{2}$. 用运动、变化、相互联系的函数观点来分析、处理变量之间的关系, 或利用函数的奇偶性、单调性、周期性等性质可解某些求值问题. 6. 不等式问题用函数思想来处理 解(证)不等式问题, 从本质上说, 是研究相应函数的零点, 正负区间及单调性的问题. 因此, 用函数思想来处理这类问题, 不仅会优化解题过程, 而且会使我们迅速获得结题途径. 例26: 解不等式$\sqrt{265 - x^2} > 31 - x$. 证明: 设$f(x) = \sqrt{265 - x^2} - (31 - x)$, 则原不等式的解与$f(x) > 0$的自变量取值范围相同, $f(x)$的定义域是$-25 \leq x \leq 25$. (看根号) 令$f(x) = 0$, 则$f(x) = 0$的两个零点为$x_1 = 7$, $x_2 = 24$, 这两个零点把定义域分为三个区间(零点除外)$[-25, 7], (7, 24), (24, 25)$. $f(x)$在其定义域内变化时, 它从一个区间的负(或正)变化到另一个区间的正(或负)必经过零点. 因此, 可用每个小区间上的特殊值的函数符号代替对应小区间上的函数符号. 因为$f(-25) = -56 < 0$, $f(20) = 4 > 0$, $f(25) = -6 < 0$, 而$x = 20 \in (7, 24)$, 所以在区间$(7, 24)$上, $f(x) > 0$, 即不等式$\sqrt{265 - x^2} > 31 - x$的解为$\{x 7 < x < 24\}$. 7. 比较大小 对于比较含有参变量的两式大小问题, 有时候利用函数的有关知识, 可以迅速获解. 例29: 有a和b是一直角三角形的两直角边长, c为斜边长, 若$n \in N$, 试比较$a^n + b^n$和c^n的大小, 并证明你的结论.	
--	--	--

思考与分析：易知 $a+b>c$, $a^2+b^2=c^2$.

当 $n \geq 3$ 时，注意到原题中的指数形式，由 $0 < \frac{a}{c} < 1$ 可知 $\left(\frac{a}{c}\right)^n$ 是减函数，由

$$\frac{a^n+b^n}{c^n} = \left(\frac{a}{c}\right)^n + \left(\frac{b}{c}\right)^n < \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{c^2} = 1,$$

便知 $a^n+b^n < c^n$.

8. 用于求方程中的参数问题

例30：设二次方程 $x^2 - 2px + p - 2 = 0$ 的两根满足 $-1 < x_1 < 1, 1 < x_2 < 2$ ，试确定 p 的取值范围.

解：设 $f(x) = x^2 - 2px + p - 2$ ，二次项系数为正，所以抛物线开口向上. 由题意知

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ f(-1) > 0 \\ f(1) < 0 \\ f(2) > 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} (-2p)^2 - 4(p-2) > 0 \\ 3p-1 > 0 \\ -p-1 < 0 \\ -3p+2 > 0 \end{cases}, \text{ 解之得 } \frac{1}{3} < p < \frac{2}{3}.$$

故 p 的取值范围为 $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

9. 用函数思想处理数列问题

例32：在等差数列 $\{a_n\}$ 中， $a_3 = 12$, $S_{12} > 0$, $S_{13} < 0$,

(1) 求公差 d 的取值范围；

(2) 指出 $S_1, S_2, \dots, S_{12}$ 中，哪个值最大，并说明理由.

思考与分析：在等差数列中 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$ ，又由 $a_3 = 12$ 可得 a_1 与 d 的关系，把 a_1 用关于 d 的表达式替代，则得到一个关系式，我们可以把这个关系式看作关于 n 的二次函数，这个二次函数的常数项为 0，二次项系数为 $\frac{d}{2}$ ，可以用二次函数的有关知识来解等差数列的前 n 项和的问题.

解 (1) $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$ ，又由 $a_3 = 12$ 得 $a_3 = a_1 + 2d = 12$ ，所以 $a_1 = 12 - 2d$.

$$\text{所以 } S_n = n(12 - 2d) + \frac{n(n-1)}{2}d = \frac{d}{2}n^2 + \left(12 - \frac{5d}{2}\right)n.$$

$$\text{由题意得 } \begin{cases} S_{12} > 0 \\ S_{13} < 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} 72d + 12 \cdot \left(12 - \frac{5d}{2}\right) > 0 \\ \frac{169}{2}d + 13 \cdot \left(12 - \frac{5d}{2}\right) > 0 \end{cases},$$

解得 $-\frac{24}{7} < d < -3$ ，则公差 d 的取值范围 $\left(-\frac{24}{7}, -3\right)$.

解 (2) $S_n = \frac{d}{2}n^2 + \left(12 - \frac{5d}{2}\right)n = \frac{d}{2}\left[n - \frac{1}{2}\left(5 - \frac{24}{d}\right)\right]^2 - \frac{d}{8}\left(5 - \frac{24}{d}\right)^2$, 因为 $\frac{d}{2} < 0$, 所以抛物线开口向下. 所以当 $\left[n - \frac{1}{2}\left(5 - \frac{24}{d}\right)\right]^2$ 最小时, 函数 S_n 取得最大值.

因为 $-\frac{27}{7} < d < -3$, 所以 $6 < \frac{1}{2}\left(5 - \frac{24}{d}\right) < 6.5$, 从而在正整数 n 中, 当 $n=6$ 时, $\left[n - \frac{1}{2}\left(5 - \frac{24}{d}\right)\right]^2$ 最小, 所以 S_6 最大.

10. 通过对函数值域的考察解决几何量的变化问题

例33: 函数 $y = f(x)$ 图像是从原点出发的一条折线,

当 $n \leq y \leq n+1 (n=0,1,2,\dots)$ 时, 图像是斜率为 b^n 的线段 (正常数 $b \neq 1$), 数列 $\{x_n\}$ 由 $f(x_n) = n (n=0,1,2,\dots)$ 定义, 求

(1) x_1, x_2, x_3 和 x_n 的表达式;

(2) $f(x)$ 的表达式及定义域.

解 (1) 当 $0 \leq y \leq 1$ 时, $k = b^0 = 1 \Rightarrow y = f(x) = x, f(x_1) = 1 \Rightarrow x_1 = 1$;

当 $1 \leq y \leq 2$ 时, $k = b^1 = b \Rightarrow y - 1 = b(x - 1) \Rightarrow y = f(x) = 1 + b(x - 1),$

$f(x_2) = 2 \Rightarrow bx_2 - b + 1 = 2 \Rightarrow x_2 = 1 + \frac{1}{b};$

当 $2 \leq y \leq 3$ 时, $k = b^2 \Rightarrow y - 2 = b^2\left[x - \left(1 + \frac{1}{b}\right)\right], y = f(x) = 2 + b^2\left[x - \left(1 + \frac{1}{b}\right)\right],$

$f(x_3) = 3 \Rightarrow 2 + b^2\left[x - \left(1 + \frac{1}{b}\right)\right] = 3 \Rightarrow x_3 = 1 + \frac{1}{b} + \frac{1}{b^2}.$

归纳得 $x_n = 1 + \frac{1}{b} + \frac{1}{b^2} + \dots + \frac{1}{b^{n-1}}.$

解 (2) 由 (1) 得 $f(x)$ 的表达式是

$$f(x) = \begin{cases} x, 0 \leq x \leq 1 \\ 1 + b(x - 1), 1 \leq x \leq 1 + \frac{1}{b} \\ 2 + b^2\left[x - \left(1 + \frac{1}{b}\right)\right], 1 + \frac{1}{b} \leq x \leq 1 + \frac{1}{b} + \frac{1}{b^2} \\ \dots\dots\dots \\ n + b^n\left[x - \left(1 + \frac{1}{b} + \frac{1}{b^2} + \dots + \frac{1}{b^{n-1}}\right)\right], x_n \leq x \leq x_{n+1} \\ \dots\dots\dots \end{cases}.$$

因为 $x_n = 1 + \frac{1}{b} + \frac{1}{b^2} + \dots + \frac{1}{b^{n-1}}$, 于是有

当 $b > 1$ 时, x_n 的极限为 $\frac{b}{b-1}$, 此时 $f(x)$ 的定义域为 $\left[0, \frac{b}{b-1}\right);$

当 $0 < b < 1$ 时, $f(x)$ 的定义域为 $[0, +\infty).$

	第三节 公理化思想 一、公理化方法 公理化方法是从古希腊数学和逻辑学的发展中逐渐发展形成的。古希腊的毕达哥拉斯学派开创了把数学作为逻辑科学进行的方向，欧多克索斯在处理不可公度比时，建立了以公理为依据的演绎法，古希腊哲学家为了辩论的需要，发展了论辩术，柏拉图比较详尽地论述了论辩方法，并阐明了许多逻辑原理，可以说，公理化方法的产生（也称之为实质公理学阶段）主要来源于古希腊哲学家与数学家的贡献。 在人类数学的历史上，第一次把公理化方法系统运用于数学之中的是古希腊伟大数学家欧几里得，欧几里得把形式逻辑的公理演绎方法应用于几何学，在前人积累起来的几何知识的基础上，运用抽象分析的方法提炼出一系列的基本概念和公理，由此出发按照逻辑规则，将当时的几何知识几乎全部推导出来，从而使几何知识按公理系统形成了一个有机整体，这样，在数学领域中，公理化方法也就随之产生了。 （一）《几何原本》23 个定义 《几何原本》共 13 卷，内容包括直边形和圆的性质、比例、相似形、数论、不可公度的分类、立体几何和穷竭法等，第一卷的开篇就给出了全书第一部分所用的 23 个定义，其中比较重要的有： （1）点是没有部分的。（2）线没有宽度只有长度，线这个字指曲线。（3）一线的两端是点。（这个定义明确指出一线或一曲线总是有限长度的，《几何原本》里没有伸展到无穷远的一条曲线。（4）直线是同其中各点看齐的线。（定义 4 与定义 3 精神一致，欧几里得的直线是我们所说的线段。）（5）面只有长度和宽度。（6）面的边缘是线（所以面也是有界的图形）。（15）圆是包含在一（曲）线里的那种平面图形，其内有一点连到该线的所有直线都彼此相等。（16）于是那个点便叫圆心。（17）圆的一直径是通过圆心且两端终于圆周的任意一条直线，而且这样的直线也把圆平分。（23）平行直线是这样的一些直线，它们在同一平面内，而且往两个方向无限延长后在两个方向上都不会相交。 （二）《几何原本》5 个公设 1.任意一点到任意一点可作直线。 2.一条有限直线可以继续延长。 3.以任意点为中心及任意的距离可以画圆。 4.凡直角都相等。 5.同平面内一条直线和另外两条直线相交，若在某一侧的两个内角的和小于二直角，则这二直线经无限延长后在这一侧相交。 （三）《几何原本》5 个公理 1.跟同一件东西相等的一些东西，它们彼此也是相等的。 2.等量加等量，总量仍相等。 3.等量减等量，余量仍相等。 4.彼此重合的东西是相等的。 5.整体大于部分。 （四）《几何原本》与公理化方法 《几何原本》成为一种全新的前所未有的数学演绎的公理化形式，在数学的发展史上是一座不朽的丰碑。同时，这种公理化的方法也就成为数学理论构成的标准化模式，公理化方法也成为由数学经验上升为数学理论的唯一形式。《几何原本》的构成方法、结构模式从此成为数学的典范。 从现代公理化方法的层次来看，公理化研究的对象、性质和关系称为“论域”，这些对象、性质与关系由初始概念表示，在《几何原本》中论域是事先具体唯一给定的。 例如，研究的对象点、线都事先具体唯一给定了。“点是没有部分的”“线没有宽度只有长度”。按照“一个公理系统只有一个论域”的观点建立起来的	
--	--	--

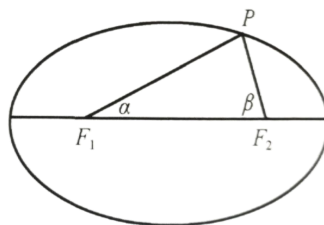
	公理学称为实质公理学，这种公理学一般是对经验知识的系统整理，公理都具有自明性。因此，从公理化方法的角度看，《几何原本》还是一种实质公理学的代表作（皮亚诺自然数算术公理系统、牛顿力学也是实质公理学）。 数学的公理化方法是数学自身发展的一种结果，自从公理化方法问世以来，它对推动数学的发展起了积极的作用。公理化方法是数学严格表述的基本方法之一，特别是在近代数学的发展中，公理化方法发挥了巨大的作用。 公理化方法（也称为公理方法），就是从尽可能少的无定义的概念（基本概念）出发去定义其他的一切概念，从一组不证自明的命题（基本公理或公设）出发，经过逻辑推理证明其他的一切命题，进而把一门学科的知识建构成成为演绎系统的一种方法。人们通常也把由原始概念（或称为基本概念）、公理所构成的演绎系统称为公理系统。 数学的公理化方法并不是从数学问世时就存在的，它有一个特定的发生发展的文化背景，公元前 3 世纪问世的《几何原本》，是古希腊数学家欧几里得对公理化方法的杰出贡献，如果说古希腊数学是公理化方法的孕育土壤，那么欧几里得就是一位伟大的公理化方法的辛勤耕耘收获者。 《几何原本》中使用的公理化方法，极大地影响了西方数学的发展，它成为后世数学家进行数学研究、构造数学理论最重要的方法，在数学的发展史中，公理化方法曾一度成为数学理论体系的唯一表述方法。可以这样说，数学的发展创造出了公理化方法，公理化方法的问世又极大地推动了数学的发展。 公理化方法在其发展中，已经超出了数学的范畴，成为自然科学乃至社会科学的种科学方法。1899 年，希尔伯特《几何基础》问世，是公理化方法在近代发展的代表作，它把以欧几里得《几何原本》为代表的公理化方法建成了一个比较完备的、形式化的公理系统。可以说，公理化的不断完善发展，使公理化方法作为一种科学的方法在数学和其他学科中发挥着越来越大的作用。 在数学的发展中，数学某一个分支的形成，都有一个来源于社会实践或来源于其他数学理论的过程，要把这些新的数学知识建成一个理论体系，要求数学家们必须准确、严格地运用公理化方法的内容，对数学知识或一个数学体系公理化的目的，就是要根据本门学科所提供的内容，经过逻辑层次上的分析与整理，最后把它表述成一个演绎系统。 二、公理化方法中关于公理选择的要求 1.协调性要求 2.独立性要求 3.完备性要求 三、公理化方法的重要作用 1.公理化方法是加工、整理知识，建立科学理论的工具，可以帮助一门学科由经验知识阶段迅速地上升到一种理性结构阶段。 2.公理化方法有助于发现新的数学成果，可以探索各个数学分支的逻辑结构，发现新问题，促进和推动科学理论的发展。 3.公理化方法对各门自然科学的表述具有积极的借鉴意义。 4.公理化方法推动了结构主义运用。 5.公理化方法有利于学生理解和掌握数学知识、数学方法，有利于培养学生的逻辑思维能力。 第四节 整体化思想 引言 所谓数学的整体化思想，就是暂时不注重于系统的某些元素的分析，暂时忽略或模糊系统的某些细节，而是重视元素之间的联系、系统的整体	
--	--	--

	结构,从整体上考虑命题的题设、题断及其相互关系,从整体上把握解决问题的方向,并作出决策。 例2: 证明, 任意3个实数a, b, c不能同时满足下列三个不等式 $a < b - c , b < c - a , c < a - b$. 证明: 设$A = a^2 - (b - c)^2, B = b^2 - (c - a)^2, C = c^2 - (a - b)^2$, 则 $ABC = (a + b - c)^2(a - b + c)^2(b + c - a)^2 \geq 0$. 故$A, B, C$中至少有一个非负, 或$A \geq 0$, 或$B \geq 0$, 或$C \geq 0$, 即 $a \geq b - c , b \geq c - a , c \geq a - b$三式中至少有一式成立, 从而 $a < b - c , b < c - a , c < a - b$不能同时成立. 一、挖掘问题整体化特征 例4: 正方形内部给出了2000个点, 先用M表示正方形的4个顶点和这2000个点构成的集合, 并按照下述规则将这张纸简称一些三角形: 每个三角形的3个顶点都是M中的元素; 除顶点外, 每个三角形中不再具有M中的点. 试问: (1) 一共可以剪出多少个三角形? (2) 一共剪了多少刀? 解(1): 如图所示, M中有两类点: 第一类为四边形的顶点, 即A, B, C, D等; 第二类是四边形内部的那2000个点, 如P, Q等. 研究以第一类点为顶点的所有三角形的相关角, 如以D为公共顶点的$\angle 1, \angle 2, \angle 3$, 它们的和为$90^\circ$; 以第二类点中每个点为顶点的三角形的相关角的和为360°, 例如, 以P为顶点的三角形有3个, 其中, 以P为公共顶点的3个角之和为$\angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 360^\circ$, 故符合条件的所有三角形的内角和为 $4 \times 90^\circ + 2000 \times 360^\circ = 4002 \times 180^\circ$, 故一共剪出4002个三角形. 解(2): 每个三角形共有3条边, 故每个三角形共要剪3刀, 4002个三角形共4002$\times$3边. 但原四边形的4条边不需要剪, 并且注意到其余每边都是2个三角形的公共边, 故应剪 $(4002 \times 3 - 4) \div 2 = 2001 \times 3 - 2 = 6001$. 故一共要剪6001刀. 二、从全局入手解决局部问题 例5: 求包含在正整数 m 与 $n(m < n)$ 之间的分母为 3 的所有不同约分数之和 . 思考与分析: 这样的所有分数是 $m + \frac{1}{3}, m + \frac{2}{3}, m + \frac{4}{3}, m + \frac{5}{3}, \dots, n - \frac{2}{3}, n - \frac{1}{3}$. 它既非等差数列, 又非等比数列, 当然不好求和, 但我们看到包含正整数 m 和 n 之间的可约分分数为 $m, m + 1, \dots, n - 1, n$. 它的各项和求出, 为 $S_1 = \frac{(m+n)(n-m+1)}{2}.$ 这两类分数统一在整体 $m, m + \frac{1}{3}, m + \frac{2}{3}, m + 1, m + \frac{4}{3}, m + \frac{5}{3}, \dots, n - 1, n - \frac{2}{3}, n - \frac{1}{3}, n$ 之中, 而这整体分数为等差数列, 各项和为 $S_2 = \frac{(m+n)(3n-3m+1)}{2}.$ 所以, 所求分数之和为 $S = S_2 - S_1 = n^2 - m^2$. 三、从整体结构考虑, 宏观把握问题实质 例6: 设P是椭圆上除长轴端点外的任意一点, F_1, F_2是焦点, e是离心率, 设$\angle PF_1F_2 = \alpha, \angle PF_2F_1 = \beta$, 求证: $\tan \frac{\alpha}{2} \cdot \tan \frac{\beta}{2} = \frac{1-e}{1+e}$.	
--	---	--

思考与分析：从宏观结构上考察，要证的结论就是要寻找一个 α, β 与 a, c 之间的关系式（因 $e = \frac{c}{a}$ ）。

如图，在 $\triangle PF_1F_2$ 中， $|F_1F_2| = 2c, |PF_1| + |PF_2| = 2a$ 。

故可以从正弦定理来推演所要证的结论。



证明：在 $\triangle PF_1F_2$ 中，由正弦定理、等比定理有 $\frac{2c}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{|PF_2|}{\sin \alpha} = \frac{|PF_1|}{\sin \beta} = \frac{2a}{\sin \alpha + \sin \beta}$ 。

从客观意义上讲，列出此式，已经把握了问题的实质，后面只有推演

$$\begin{aligned} \text{由上式有 } e = \frac{c}{a} &= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin \alpha + \sin \beta} = \frac{2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2}}{2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{\cos \frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha-\beta}{2}} \\ &= \frac{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}}. \end{aligned}$$

所以有

$$\frac{1-e}{1+e} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}}{2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}} = \tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2}.$$

四、从整体性质出发对已知条件整体运用

例7：求满足下列两个条件的所有复数 z ：

- (1) $z + \frac{10}{z}$ 是实数，且 $1 < z + \frac{10}{z} \leq 6$ ；
- (2) z 的实部和虚部都是整数。

解：令 $z + \frac{10}{z} = u$ ，则 $z^2 - zu + 10 = 0$ 。

因为 u 为实数，且 $1 < u \leq 6$ ，可见它为关于 z 的实系数一元二次方程，且

$$\Delta = u^2 - 40 < 0, \text{ 于是 } z = \frac{1}{2}(u \pm i\sqrt{40-u^2}).$$

由条件（2）知， u 只能在 2, 4, 6 中考虑。当 $u = 2$ 时， z 的虚部为 ± 3 ；当

$u = 4$ 时， z 的虚部为 $\frac{1}{2}\sqrt{24}$ ，不合题意；当 $u = 6$ 时， z 的虚部为 ± 1 。

故所求复数为 $1 \pm 3i, 1 \pm i$ 。

五、从整体结构考虑，抓住整体的不变性

例11：设 $n(\geq 2)$ 名选手两两之间进行一场比赛，没有平局，第 i 名选手胜 w_i 场，负 l_i 场，

求证： $w_1^2 + w_2^2 + \cdots + w_n^2 = l_1^2 + l_2^2 + \cdots + l_n^2$ 。

$$\text{证明: } \sum_{i=1}^n w_i^2 - \sum_{i=1}^n l_i^2 = \sum_{i=1}^n (w_i^2 - l_i^2) = \sum_{i=1}^n (w_i - l_i)(w_i + l_i)$$

$$= (n-1) \sum_{i=1}^n (w_i - l_i) = (n-1) \left(\sum_{i=1}^n w_i - \sum_{i=1}^n l_i \right) = 0.$$

$$\text{故 } w_1^2 + w_2^2 + \cdots + w_n^2 = l_1^2 + l_2^2 + \cdots + l_n^2.$$

六、利用配对策略，把局部补成整体

例12: 已知 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 均为整实数，且满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$.

$$\text{求证: 不等式 } \frac{a_1^2}{a_1 + a_2} + \frac{a_2^2}{a_2 + a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1} + a_n} + \frac{a_n^2}{a_n + a_1} \geq \frac{1}{2}$$

对正整数 n 成立.

$$\text{例12思考与分析: 设 } A = \frac{a_1^2}{a_1 + a_2} + \frac{a_2^2}{a_2 + a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1} + a_n} + \frac{a_n^2}{a_n + a_1},$$

利用配对策略，构造 A 的对偶式

$$B = \frac{a_2^2}{a_1 + a_2} + \frac{a_3^2}{a_2 + a_3} + \cdots + \frac{a_n^2}{a_{n-1} + a_n} + \frac{a_1^2}{a_n + a_1}.$$

我们研究 $A+B$ 和 $A-B$,

$$\begin{aligned} A-B &= \frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1 + a_2} + \frac{a_2^2 - a_3^2}{a_2 + a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}^2 - a_n^2}{a_{n-1} + a_n} + \frac{a_n^2 - a_1^2}{a_n + a_1} \\ &= (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_{n-1} - a_n) + (a_n - a_1) = 0 \end{aligned}$$

这时 $A+B=2A$ (待续)

$$2A = A+B = \frac{a_1^2 + a_2^2}{a_1 + a_2} + \frac{a_2^2 + a_3^2}{a_2 + a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}^2 + a_n^2}{a_{n-1} + a_n} + \frac{a_n^2 + a_1^2}{a_n + a_1}.$$

$$\text{注意到对正数 } m \text{ 和 } n, \text{ 有 } \left(\frac{m+n}{2} \right)^2 \leq \frac{m^2 + n^2}{2},$$

$$\text{于是 } \frac{m^2 + n^2}{m+n} \geq \frac{1}{2}(m+n). \text{ 进而有}$$

$$2A \geq \frac{1}{2} [(a_1 + a_2) + (a_2 + a_3) + \cdots + (a_{n-1} + a_n) + (a_n + a_1)] = 1 \text{ (题目给的条件).}$$

$$\text{故 } A \geq \frac{1}{2}.$$

七、挖掘结论的整体性

例 13: 今有男女各 $2n$ 人，围成内外两圈跳邀请舞，每圈各 $2n$ 人，有男有女，跳舞规则如下：每当音乐一起，如面对面是一男一女，则男的邀请女的跳舞；如果均是男的，或者均是女的，则鼓掌助兴，曲终时，外圈的人均向前一步，如此继续，试证：在整个跳舞过程中，至少有一次起舞的男女不小于 n 。

证明：设内圈的人为 $x_1, x_2, \dots, x_{2n}$ ，外圈的人为 $y_1, y_2, \dots, y_{2n}$ ，并设男的为 $+1$ ，女的为 -1 。有了以上的赋值，可以使问题数学化。

考查 $x_i y_i$ 。

若 x_i 和 y_i ，都是男的或者都是女的，依题设，则不起舞，此时有

	$x_i y_i = +1 > 0$. 若 x_i 和 y_i 一是男的, 一是女的, 依题设, 则起舞, 此时有 $x_i y_i = -1 < 0$. 考虑结论的整体, 假定每次起舞都小于 n 对, 即结论不成立, 我们寻求可能发生的矛盾. 由于总对数为 $2n$ 对, 若每次起舞者都小于 n 对, 则起舞者小于不起舞者, 则有 $\begin{aligned} x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_{2n} y_{2n} &> 0, \\ x_1 y_2 + x_2 y_3 + \cdots + x_{2n} y_1 &> 0, \\ &\dots \\ x_1 y_{2n-1} + x_2 y_n + \cdots + x_{2n} y_{2n-2} &> 0, \\ x_1 y_{2n} + x_2 y_1 + \cdots + x_{2n} y_{2n-1} &> 0. \end{aligned}$ 将以上 $2n$ 个不等式相加得 $(x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n})(y_1 + y_2 + \cdots + y_{2n}) > 0. \quad \textcircled{1}$ 下面针对 $\textcircled{1}$ 式, 研究 $x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n}$ 和 $y_1 + y_2 + \cdots + y_{2n}$. 设内圈有 k 个男的, 则有 $2n - k$ 个女的, 此时外圈有 $2n - k$ 个男的, k 个女的. 于是 $\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n} &= k \cdot (+1) + (2n - k) \cdot (-1) = 2k - 2n, \\ y_1 + y_2 + \cdots + y_{2n} &= (2n - k) \cdot (+1) + k \cdot (-1) = 2n - 2k, \end{aligned}$ 两式相乘得 $(x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n})(y_1 + y_2 + \cdots + y_{2n}) = -4(n - k)^2 \leq 0. \quad \textcircled{2}$ $\textcircled{1}$ 与 $\textcircled{2}$ 发生矛盾. 故一定有一次起舞的男女不少于 n 对. 从上述七方面我们可以看出, 在解题中, 我们适当地利用整体化思想, 就能找到新的解题途径. 其实, 整体化思想还有很多, 我们在学习中如果能够多加思考, 一定能够掌握更多、更灵活的方法.	
	第五节 分类讨论思想 一、分类的原因 1. 问题所涉及的数学概念是分类进行定义的。 例如, a 的定义分 $a > 0$, $a = 0$, $a < 0$ 三种情况, 这种分类讨论题型可以称为概念型。 2. 问题中涉及的数学定理、公式和运算性质、法则有范围或者条件限制, 或者是分类给出的。 例如, 等比数列的前 n 项和的公式, 分 $q = 1$ 和 $q \neq 1$ 两种情况, 这种分类讨论题型可以称为性质型。 3. 解含有参数的题目时, 必须根据参数的不同取值范围进行讨论。 例如, 解不等式 $ax > 2$ 时分 $a > 0$, $a = 0$ 和 $a < 0$ 三种情况讨论、这称为含参型。 另外, 某些不确定的数量、不确定的图形的形状或位置、不确定的结论等, 都主通过分类讨论, 保证其完整性, 使之具有确定性。 二、分类的标准 分类具有不可缺少的三要素: 母项、子项和根据, 母项是被划分的种概念, 子项是划分后所得的类概念, 划分的根据就是借以划分的标准。 分类必须有一定的标准, 即必须根据对象本身的某种属性或关系来进行划分。由于客观事物有多方面的属性, 事物之间有多方面的联系, 因此, 分类的标准也是多方面的, 可根据不同的需要采用不同的分类标准, 对事物进行不同的分类。但每一次分类都应按照同一标准进行, 所取的标准应服从于研究的目的或观察问题的角度。 三、分类的原则	

	1.同一性原则——分类应按同一个标准 2.合理性原则——分类应当到不重复也不遗漏 四、分类讨论的常规方法 1.依据数学概念的定义进行分类.例如,绝对值、直线与平面所成的角等。 2.依据数学公式、原则、法则的适用范围进行,例如,等比数列求和公式。 3.依据数形结合进行分类.例如,集合的交、并、补用数轴讨论。 4.依据位置关系进行分类.例如,几何中点与点、点与线、面与面等位置关系。 5.依据数学性质进行分类.例如,偶次算术根的性质,二次函数、幂函数等性质。 6.依据参数的变化范围进行分类。 7.依据整数的奇偶性进行分类。 五、用分类讨论思想解题的一般步骤 1.确定分类讨论的对象以及所讨论对象的整体的范围。 2.确定分类标准,合理分类,即标准统一、不漏不重、分类互斥(没有重复)。 3.逐步逐级分类讨论,获取阶段性结果。 4.综合、归纳结论。 六、分类思想应用举例 1.排列组合问题 例 1: 所有三位数中有且仅有两个数字相同的共有多少个? 思考与分析: 符合条件的三位数可以分成如下 10 类: 有两个 0 的: $100, 200, \dots, 900$, 共有 $C_1^9=9$ (个); 有两个 1 的: 在除 1 以外的 9 个数中任选 1 个, 在 1, 1 之间的位置关系有 3 个但应除去 011 这种情况, 共有 $9 \times 3 - 1 = 26$ (个); 同理, 有两个 2, 两个 3, ..., 两个 9 的三位数各有 26 个. 所以, 共有 $26 \times 9 + 9 = 243$ (个)。 2. 运用抽屉原理的有关问题 例 4: 在 1 到 100 的自然数集合中, 任取 51 个数, 其中必有两个数, 他们中的一个另一个的倍数. 思考与分析: 构造抽屉, 设 P 为 1 到 100 之间的奇数, 按 $P \times 2^n (n = 0, 1, \dots)$ 的形式可以将 1 到 100 的所有自然数分成符合要求的 50 类: $A_1 = \{1, 1 \times 2, 1 \times 2^2, \dots, 1 \times 2^6\}, A_2 = \{3, 3 \times 2, 3 \times 2^2, \dots, 3 \times 2^5\}, \dots,$ $A_{25} = \{49, 49 \times 2\}, A_{26} = \{51\}, \dots, A_{50} = \{99\}.$ 由于 50 类中任取 51 个数, 至少有两个数在同一类中. 3. 含参数问题的讨论 例 5: 讨论方程 $(k^2 + k - 2)x^2 + k^2 y^2 = 9$ 的曲线的形式. 思考与分析: 先划分 $k^2 + k - 2 = 0, k^2 = 0$ 的根为 $-2, 0, 1$. (1) 当 $k < -2$ 时, 因为 $k^2 + k - 2 > 0, k^2 > 0$, 多以曲线是椭圆. 又由于此时 $k^2 + k - 2 < k^2$, 故它的焦点在 x 轴上. (2) 当 $k = -2$ 时, 方程化为 $y = \pm \frac{3}{2}$, 这是与 x 轴平行的两条直线. (3) 当 $-2 < k < 0$ 时, 因为 $k^2 + k - 2 < 0, k^2 > 0$, 所以曲线是双曲线, 焦点在 y 轴上. (4) 当 $k = 0$ 时, 不存在图形. (5) 当 $0 < k < 1$ 时, 因为 $k^2 + k - 2 < 0, k^2 > 0$, 所以曲线是双曲线, 焦点在 x 轴上. (6) 当 $k = 1$ 时, 方程化为 $y = \pm 3$, 这是与 x 轴平行的两条直线. (7) 当 $k > 1, k^2 + k - 2 > 0, k^2 > 0$ 时, 其中当 $1 < k < 2$ 时, 曲线是焦点在 x 轴上的椭圆; 当 $k = 2$ 时, 曲线变成 $x^2 + y^2 = \frac{9}{4}$; 当 $k > 2$ 时, 曲线是焦点在 y 轴上的椭圆.	
--	--	--

4. 剩余问题

例10: 试证: 大于5的质数的平方与1的差为24的倍数.

思考与分析: 如何表示 大于5的质数是解题的关键.

将大于5的自然数以除以6的余数为标准分成如下6类: $6n, 6n+1, 6n+2, 6n+3, 6n-2, 6n-1$.

由于大于5的质数是奇数, 所以这些质数只能为 $6n \pm 1$.

证明: 当质数为 $6n+1$ 时, $(6n+1)^2 - 1 = 36n^2 + 12n = 12n(3n+1)$, 因 $n, 3n+1$ 中必有一个是偶数, 此时24是 $(6n+1)^2 - 1$ 的约数.

当质数为 $6n-1$ 时, $(6n-1)^2 - 1 = 36n^2 - 12n = 12n(3n-1)$, 因 $n, 3n-1$ 中必有一个是偶数, 此时24是 $(6n-1)^2 - 1$ 的约数.

5. 含绝对值问题的分类

例11: 已知 $a \in R$, 函数 $f(x) = x^2|x-a|$, 求函数 $y = f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上的最小值.

思考与分析: 本题是对分类讨论的思想考查得非常充分和深入的一道试题, 需要对 a 的取值进行讨论.

解: 易知 $f(x) = \begin{cases} x^2(x-a), & x \geq a \\ x^2(a-x), & x \leq a \end{cases}$.

(1) 当 $a \leq 1$ 时, 即 $a \leq 1 \leq x \leq 2$, $f(x) = x^3 - ax^2$.

所以 $f'(x) = 3x^2 - 2ax$, 令 $f'(x) = 0$, 即 $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{2}{3}a$.

因为 $1 \leq x \leq 2$, 所以 $\frac{2}{3}a < x, 0 < x$.

所以 $x = 0$ 或 $x = \frac{2}{3}a$ 都不在 $[1, 2]$ 内, 而 $x \in [1, 2]$, 有 $f'(x) > 0$, 即 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 内为增函数.

又 $f(1) = 1 - a$, $f(2) = 8 - 4a$, 故当 $a \leq 1$ 时, $f(x)_{\min} = 1 - a$.

(2) 当 $1 < a < 2$ 时, 即 $f(x) = \begin{cases} -x^3 + ax^2, & 1 \leq x \leq a \\ x^3 - ax^2, & a < x \leq 2 \end{cases}$.

① 当 $1 \leq x \leq a$ 时, $f'(x) = -3x^2 + 2ax = 0$, 即 $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{2}{3}a$.

若 $1 < a < \frac{3}{2}$, $1 \leq x \leq a$, 则 $f'(x) < 0$, 即 $f(x) = -x^3 + ax^2$ 在 $[1, a]$ 上为减函数.

所以 $f(x)_{\min} = -a^3 + a^3 = 0$.

若 $\frac{3}{2} \leq a < 2$, $1 \leq x \leq a$, 则 $f(x) = -x^3 + ax^2$ 在 $\left[1, \frac{2}{3}a\right]$ 上递增, 在 $\left[\frac{2}{3}a, a\right]$ 上递减.

又 $f(1) = 1 - a > 0$, $f(a) = 0$, 所以 $f(x)_{\min} = -a^3 + a^3 = 0$.

② 当 $a \leq x \leq 2$ 时, $f'(x) = 3x^2 - 2ax = 0$, 即 $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{2}{3}a$.

因为 $1 < a < 2$, 所以当 $x \in [a, 2]$ 时, $f'(x) > 0$, 即 $f(x)$ 在 $[a, 2]$ 上为增函数.

所以 $f(x)_{\min} = -a^3 + a^3 = 0$.

故当 $1 < a < 2$ 时, $f(x)_{\min} = 0$.

(3)当 $a \geq 2$ 时, $f(x) = ax^2 - x^3$. 又 $f'(x) = 2ax - 3x^2 = 0$, 即 $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{2}{3}a$

①当 $2 \leq a < 3$ 时, $f(x) = ax^2 - x^3$ 在 $\left[1, \frac{2}{3}a\right]$ 上递增, 在 $\left[\frac{2}{3}a, 2\right]$ 上递减.

又 $f(1) = a - 1$, $f(2) = 4a - 8$,

若 $f(1) \leq f(2)$, 即 $\frac{7}{3} \leq a < 3$, $f(x)_{\min} = a - 1$.

若 $f(1) > f(2)$, 即 $2 \leq a < \frac{7}{3}$, $f(x)_{\min} = 4a - 8$.

②当 $a \geq 3$ 时, $f(x) = ax^2 - x^3$, 在 $[1, 2]$ 内为增函数. 所以 $f(x)_{\min} = f(1) = a - 1$.

故当 $2 \leq a < \frac{7}{3}$ 时, $f(x)_{\min} = 4a - 8$; 当 $a \geq \frac{7}{3}$ 时, $f(x)_{\min} = a - 1$.

综上所述,
$$f(x)_{\min} = \begin{cases} 1 - a, a \in (-\infty, 1] \\ 0, a \in (1, 2) \\ 4a - 8, a \in \left[2, \frac{7}{3}\right) \\ a - 1, a \in \left[\frac{7}{3}, +\infty\right) \end{cases}.$$

分类讨论是一种重要的数学思想方法, 是一种数学解题策略, 对于何时需要分类讨论, 则要视具体问题而定. 但可以在解题时不断地总结经验.

如果对于某个研究对象, 若不对其分类就说不清楚, 则应该分类讨论. 另外, 数学中的一些结论、公式、方法对于一般情形是正确的, 但对于某些特殊情形或比较隐蔽的“个别”情况(示例见下一页)未必成立. 这也是分类讨论的原因.

需要分类讨论的“个别”情形举例

(1) “方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有实数解”转化为“ $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ ”忽略了个别情形: 当 $a = 0$ 时, 方程有解不能转化为 $\Delta \geq 0$;

(2) 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和公式 $S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$ 中有个别情形: $q = 1$ 时, 公式不再成立, 而是 $S_n = na_1$;

(3) 设直线方程时, 一般可设直线的斜率为 k , 但有个别情形: 当直线与 x 轴垂直时, 直线无斜率, 应另行考虑;

(4) 若直线在两轴上的截距相等, 常常设直线方程为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1$, 但有个别情形: $a = 0$ 时, 再不能如此设, 应另行考虑.

第六节 集合思想

一、集合思想概况

19 世纪末叶, 德国数学家乔治·康托尔 (Georg Cantor) 创立了集合论, 被认为是近代数学史上最令人惊异的成就之一, 在数学史上引起了一场“革命”.

集合论是现代数学的基础, 没有康托尔的集合论也许就没有现代数学, 康托尔创立了集合论, 它不仅给数学奠定了坚实的基础, 而且如同哥白尼的日心说对于天文学, 相对论、量子力学对于物理学一样, 对于数学领域来说是一场伟大的革命. 从产生之日起, 集合论的思想就逐渐渗透到数学的各个领域, 一方面促进了数学的发展, 另一方面导致了对数学基础的深刻研究.

康托尔创立的集合论基本思想(原则)主要包括概括原则、实无穷思

	想、外延原则、一一对应原则及其对角线方法。 初等数学中集合的表示方法有列举法、描述法和图示法三种.其中用描述法表示集合就是应用的概括原则。 概括原则是指对于任一性质 P，能且仅能把所有满足给定性质的对象 $P(x)$ 汇集在一起而构成一个集合的造集原则。概括原则保证了各种不同集合的存在性，用符号表示即为 $S := \{x P(x)\},$ 其中 $P(x)$ 是“x 具有性质 P”的一个缩写。 关于“集合”本身的含义,康托尔曾作过描述:“把一些明确的(确定的)、彼此有区别的、具体的或想象中抽象的东西看作一个整体,便叫做集合。”其实,康托尔用整体来说明集合,不能称为集合的定义,只是对集合概念的一种描述,是一种同义反复。集合悖论表明,对性质 P 必须加以某种限制。 二、集合论基本原则 1. 概括原则一经采用,在数学中立即引入了实无穷思想,因为满足条件 P 的元素可以是无限多的,康托尔的集合论明确了无穷集合及其表示方法,同时,康托尔认为,他的超穷数理论对于潜无穷的存在性和应用性是绝对必要的,任何一种潜无穷必然导致超穷。 2. 外延原则是指两个集合 A 和 B,当且仅当它们的元素完全相同时,才把它们看作相同的,根据外延原则可产生集合的包含关系和、并、交、差等运算,其性质类似于数的加、减、乘等运算(但也有不同之处)。外延原则保证了集合的确定性。 3. 一一对应原则是指,若集合 A 与集合 B 的元素之间建立了一一对应关系,则集合 A 与 B 有相同的基数(或势)。这实质上揭示了无穷集合的一个本质特征,即整体与部分在数量上可以处于同等地位。所说的一一对应原则和对角方法结合起来可以得到这样的事实:即无穷集合不是清一色的,它既存在像自然数集 N 一样的可数无穷集,势为 $\aleph_0$,又有像实数集一样的不可数无穷集,势为 C,称为连续统势。 三、作为现代数学理论基础的集合论 集合论不仅引发数学无穷的革命,还为现代数学奠定了理论基础。 中学数学中所研究的各种对象都可以看作集合或集合中的元素,用集合语言可以简洁明了地表述数学概念,准确、简捷地进行数学推理。数学教师在教学中还可以运用集合思想建立数学概念系统,或在复习教学中帮助学生归纳、整理数学知识。 对数学学习来说,要帮助学生养成一种集合的思维习惯:要善于把在某些方面有类似性质的对象(或满足某一条件的对象)放在一起视为一个集合,然后利用集合的有关概念或通过集合的有关运算来研究和解决问题。 同时,集合对于数学概念的形成,起着基础作用。可以说,每个数学概念都可以用集合概念语言来定义。正是由于集合论对数学的基础作用和重要性,它已经成为理解和掌握现代数学所必不可少的基础知识,它不仅成为大学数学专业课程的必修内容,而且世界各国已把它的基本内容、思想和方法渗透到了中小学的数学教材中。 中学数学中研究的对象都可以看作集合,我们最熟悉的自然数、整数、有理数、实数、复数等概念都是一些特定的集合,分别称作自然数集 N,整数集 Z,有理数集 Q,实数集 R 和复数集 C。而在几何中研究的图形都是三维空间中的点集。进一步,数与数之间的顺序关系、运算关系、图形与图形之间的位置关系也都是集合。 中学数学中常见的集合有下面几种: (1) 数集,随着中学生数学学习的深入,数集由自然数集 N 扩张到	
--	---	--

	有理数集 Q，再扩张到实数集 R，直至扩张到复数集 C。 (2) 方程（或方程组）的解集，方程或方程组的解集可以看作满足某性质 P 的数的有限集合。 (3) 不等式（或不等式组）的解集，不等式（或不等式组）的解集可以看作满足某性质 P 的数的无限集合。 (4) 点集，在集合论产生之前，人们就已经在研究数集和几何图形了，但何图形仅仅是被当作一个完整的几何体来研究的，并没有被看作由点组成的集合，而如果以康托尔的集合思想为基础，就可以把中学数学中的任何一个几何图形都看作三维空间的点集的一个子集。 更为重要的是，集合思想沟通了数和形的内在联系，使得由某个图形性质给出的点集和满足性质 P 的实数对组成的集合建立一一对应的关系，进而使中学数学能够用代数方法解答几何问题，能够对代数问题给出几何解释，还能够通过几何图形来解答代数问题。 第七节 转化与变换思想 著名的数学家，莫斯科大学教授 C. A. 雅洁卡娅曾在一次向数学奥林匹克参赛者发表《什么叫解题》的演讲时提出：“解题就是把要解的题转化为已经解过的题”。数学的解题过程，就是从未知向已知、从复杂到简单的化归转换过程。 一个数学问题直接求解困难时，我们常用适当方式将问题变为另一个数学问题，使之更容易求解，这就是变换问题法。变换是映射中一种常见的形式，是数学中某一领域内部的一种映射，是将复杂问题转化为简单问题，较难问题转化为较易问题的数学化归，用简单的观点去看待复杂的形式就能抓住形式表现的数学本质及辩证联系，从而找到解决问题的简化途径。这就是变换思想的实质。 思维程序是：① 选择适当的变换，等价的或不等价的（加上约束条件），以改变问题的表达形式；② 连续进行有关变换，注意整个过程的可控制性和变换的技巧，直至达到目标状态。 变换思想是一种变更问题法。在中学数学中有广泛的运用，它有以下常见思维模式。 一、等价条件变换 所谓等价变换，是指把原问题变更为新问题，使两者的答案完全相同，即互为充要条件，它要求转化过程中前因后果是充分必要的，才能保证转化后的结果仍为原问题的结果。 等价转化思想方法的特点是具有灵活性和多样性，在应用等价转化的思想方法去解决数学问题时，没有一个统一的模式去进行。可以在数与数、形与形、数与形之间进行转换；它可以在宏观上进行等价转化，如在分析和解决实际问题的过程中，普通语言向数学语言的翻译；它可以在符号条统内部实施转换，即所说的恒等变形，消去法、换元法、数形结合法、求值、求范围问题等，都体现了等价转化思想，我们更是经常在函数、方程、不等式之间进行等价转化。 可以说，等价转化是将恒等变形在代数式方面的形变上升到保持命题的真假不变。由于其多样性和灵活性，我们要合理地设计好转化的途径和方法，避免死搬硬套题型。 在数学操作中实施等价转化时，我们要遵循熟悉化、简单化、直观化、标准化的原则。即把我们遇到的问题，通过转化变成我们比较熟悉的问题来处理；或者将较为烦琐、复杂的问题，变成比较简单的问题，比如从超越式到代数式、从无理式到有理式、从分式到整式等；或者比较难以解决、比较抽象的问题，转化为比较直观的问题，以便准确把握问题的求解过程，比如数形结合法；或者从非标准型向标准型进行转化。 按变换的对象划分，等价条件变换有三种形式：	
--	---	--

◇ 变换条件模式：有的问题条件庞大分散，或结构复杂，如按涉及的概念含义与有关知识，把条件加以变换，可使问题简明，从而较易找到解题的思路。

◇ 变换结论模式：有的数学问题结论是一个隐式，此时可进行等价转换，使其表述明显，并更接近于从条件出发的推导。

◇ 同时变换条件与结论模式：将条件与结论适当变换为可以用已知求解过程构成的新条件与结论，是解决数学问题最常见的方法。这种方法实质上是关系映射反演原理的应用。

二、非等价变换

数学问题的解决应用等价条件转化是大量的，但有时也用到非等价转化，只要运用得当，同样可以获得成功。非等价转化其过程是充分或必要的，要对结论进行必要的修正（如无理方程化有理方程要求验根），它能给人带来思维的闪光点，找到到解决问题的突破口。

1. 强弱命题转换

有的数学问题通过变换，把原命题变为更强命题或较弱命题，通过迂回的方法，使问题得以解决。

2. 将“论域”非等价变换

有的数学问题可将“论域”施行非等价变换，而后回归原“论域”，使问题得到解决。比如将分式方程整式化，将无理方程有理化，将超越方程代数化等，都属于用非等价变换谈论问题的解，而只是最后通过“验根”得到原方程的解。

例1：设 $f(x) = \frac{x}{a(x+2)}$ ， $x = f(x)$ 有唯一解， $f(x_0) = \frac{1}{991}$ 且 $f(x_{n-1}) = x_n (n=1, 2, \dots)$ ，求 x_{1987} 。

思考与分析：将条件适当转化，它实质上是说方程 $\frac{x}{a(x+2)} = x$ 有唯一解，即 $ax^2 + (2a-1)x = 0$ ，

那么它的判别式 $\Delta = (2a-1)^2 - 4a \cdot 0 = 0$ ，故 $a = \frac{1}{2}$ 。于是 $f(x) = \frac{2x}{x+2}$ ，条件大大简化。

由 $f(x_{n-1}) = x_n$ ， $n=1, 2, \dots$ 得

$$\frac{2x_{n-1}}{x_{n-1}+2} = x_n \Rightarrow x_{n-1}x_n + 2x_n = 2x_{n-1}, 1 + \frac{2}{x_{n-1}} = \frac{2}{x_n} \Rightarrow \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{2},$$

即 $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ 为等差数列，公差为 $\frac{1}{2}$ ，首项为 $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{f(x_0)} = 991$ 。

所以 $\frac{1}{x_{1987}} = \frac{1}{x_0} + (1987-1) \times \frac{1}{2} = 1984$ ，即 $x_{1987} = \frac{1}{1984}$ 。

例2：解方程 $\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x} = 2\cos x$ 。

思考与分析：如果根据三角函数升（降）幂公式 $1 \pm \sin 2\alpha = (\sin \alpha \pm \cos \alpha)^2$ ，

原式等价变换为 $\left|\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right| - \left|\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right| = 2\cos x$ ，必然会分四种情况讨论，太复杂。

解：两边平方得 $2 - 2|\cos x| = 4|\cos x|^2$ ，即 $(2|\cos x| - 1)(|\cos x| + 1) = 0$ 。

而 $|\cos x| + 1 = 0$ 无解。由 $|\cos x| = \frac{1}{2}$ ，解得 $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ， $x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ 。

经验根知，原方程的解为 $x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$ ， $x = 2k\pi - \frac{2\pi}{3}$ 。

利用非等价变换求得的根中往往会有多余的根，再通过检验剔除不符合要求的根。有时还会因非等价变换，不能求出满足条件的根，此时要设法补上。例3 自己看。

从以上的例子可以看出，变换问题思维模式在中学数学中应用很广，它渗透着关系映射反演原理及划归思想，是一种较高层次的数学思维模式。

	第八节 逐步逼近思想 一、什么是逐步逼近 华罗庚说：“善于退，足够地退，退到最原始而不失去重要性的地方，是学好数学的一个诀窍！” 这里“退”的目的，就是要为了逐步逼近，如果让你解决一个比较复杂的问题，并且一下子又不能解决，这时你不妨将原问题转化为 n 个按一定顺序串联起来的但比较容易解决的问题，这些问题一个比一个更加逼近原来的问题，接下来你就集中精力解决这些转化得到的问题，随着这些问题的顺次解决，你也就按逐步逼近的方法得到了原来问题的答案。 逐步逼近法在数学中应用非常广泛： 例如，求圆面积时，我们用边数逐渐增加的内接多边形来逐步逼近；求曲线弧长时，我们用越来越小的线段组成的内接折线来逐步逼近；对于无理数，我们用一系列精确度越来越高的十进小数来逐步逼近等。其实，逐步逼近法不仅适用于数学，它对任何科学研究都是卓有成效的，天文学家开普勒发现行星运动三定律用的也是逐步逼近法，他根据对第谷的观察资料进行分析，初次假设太阳绕地球旋转，与观察不符；第二次假设火星绕太阳作圆周运动，仍有相当偏差；最后假设火星绕太阳作椭圆运动，终于得到了正确的结论。 除了少数例外，科学上的许多重大发现、发明都是按逐步逼近的过程进行的。遗憾的是，我们一般只能看到最后的、成功的结果，而那些逐步逼近的过程则从不公布，这是非常可惜的，因为正是在这些被逐步抛弃的中间假设中蕴藏着许多经验教训和无数个不眠之夜，这或许也是某些人对科学家产生迷信，认为他们都是超级天才，非常人所能望其项背的一个重要原因。 下面举例打破“迷信”。 例6：已知 $x_1, x_2, \dots, x_{67}$ 是正整数，且 $x_1 + x_2 + \dots + x_{67} = 110$，求 $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{67}^2$ 的最大值。 思考与分析：我们从任意一组和为110的67个正整数 $x_1, x_2, \dots, x_{67}$ 开始进行调整不妨设 $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{67}$。首先把 $x_2, x_3, \dots, x_{66}$ 冻结，只研究 x_1 和 x_{67}，由 $x_1 \leq x_{67}$，并且注意到 $(x_1 - 1)^2 + (x_{67} + 1)^2 = x_1^2 + x_{67}^2 + 2 + 2(x_{67} - x_1) > x_1^2 + x_{67}^2.$ 上式的不等式说明，如果把最小的数 x_1 减少1，而把最大数 x_{67} 加上1（这是67个正整数的和不变），它们的平方和变大。 为此，我们这样进行调增：每次把 x_1 减少1，把减少的1加到 x_{67} 上，直到 $x_1 = 1$ 为止，从而结束对 x_1 调整。这样调整的结果是，67个正整数的和为110不变，而平方和在调整后一直变大。 再把 x_2 解冻，对 x_2 进行调整，每次把 x_2 减少1，把减少的1加到 x_{67} 上，直到 $x_2 = 1$ 为止，从而结束对 x_2 调整。 如此对 $x_3, x_4, \dots, x_{66}$ 一步一步地调整（逐步逼近），直到 $(x_1, x_2, \dots, x_{67})$ 调整为 $(1, 1, \dots, 44)$，这时由于 $1 + 1 + \dots + 1 + 44 = 100$，有 $(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{67}^2)_{\max} = 2002$。 教学小结：总结常见的数学思想与数学解题方法	
思考 与 实践	1. 复习 2. 课后习题	